Системы перечислимых множеств и их нумерации

В. А. Успенский

Доклады Академии Наук СССР, 1955, том 105, № 6, с. 1155–1158
(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 20 VIII 1955)

Произвольное отображение α какого-либо множества натуральных чисел E на множество M называется нумерацией множества M; если $\alpha(n) = x$, то n называется номером x. В теории алгоритмов важную роль играют нумерации системы $\mathcal{A}^{(n)}$ всех перечислимых (т. е. рекурсивно-перечислимых) подмножеств $\mathbb{N}^n$ (здесь $\mathbb{N}^n$ — совокупность всех «n-ок» натуральных чисел) и системы $\mathcal{U}^{(n)}$ всех вычислимых (т. е. частично-рекурсивных) функций от n аргументов [из $\mathbb{N}^n$ в $\mathbb{N}$]. В литературе известны следующие нумерации этих систем, которые мы будем называть классическими нумерациями:

- нумерация $\mathcal{A}^{(1)}$, принадлежащая Посту [2];
- нумерация $\mathcal{U}^{(n)}$ (при любом n), принадлежащая Клини [3];
- нумерация $\mathcal{A}^{(1)}$, рассмотренная Райсом [4].

Каждая классическая нумерация строится по следующему плану:

- всякому перечислимому множеству (или вычислимой функции) ставится в соответствие определяющий его (ее) конечный набор правил;
- этот набор правил записывается в определенном коде;
- все такие записи нумеруются, и тем самым получается нумерация исходной системы.

Эта особенность классических нумераций обусловливает их широкую применимость. В настоящей заметке делается попытка рассмотреть с возможно более общей точки зрения существенные для теории алгоритмов свойства нумераций[1] систем перечислимых множеств, не прибегая в окончательных формулировках к таким понятиям, как «набор правил, определяющий данное перечислимое множество». (Каждую вычислимую функцию мы отождествляем с перечислимым множеством, являющимся ее графиком, и рассматриваем таким образом $\mathcal{U}^{(n)}$ как систему всех униформных[2] перечислимых подмножеств $\mathbb{N}^{n+1}$.) Пп. 1–3 носят вводный характер.

1. Сведения из топологии. Точку x топологического пространства [1] T назовем точкой τ-прикосновения множества $P \subseteq T$, если во всякой окрестности точки x найдется такая точка $z \in P$, что всякая окрестность z содержит x. Совокупность всех точек τ-прикосновения P назовем τ-замыканием P. Назовем P τ-замкнутым, если оно совпадает со своим τ-замыканием. Скажем, что P τ-плотно в Q, если Q есть подмножество τ-замыкания P.

Лемма 1. *Пусть X и Y — топологические пространства, причем Y есть T_0-пространство. Пусть $P \subseteq X$ τ-плотно в X. Тогда всякие два непрерывные отображения X в Y, совпадающие на P, совпадают и на всем X.*

2. Системы. На протяжении всей заметки под термином «система» будем понимать произвольную систему перечислимых подмножеств множества $\mathbb{N}^n$ при каком-то n (или, при желании, произвольную систему перечислимых подмножеств множества $\mathcal{H}$ [5]). Системы будем обозначать прописными каллиграфическими [было: готическими] буквами. Для системы, все элементы которой конечны, можно

[1] Идея абстрактного изучения нумераций была высказана А. Н. Колмогоровым в докладе, сделанном 9 II 1954 г. на семинаре по рекурсивной арифметике Механико-математического факультета МГУ.

[2] По-видимому, это то, что называют *функциональными* отношениями $R \subseteq D^{n+1}$: для каждого набора $(a_1, \ldots, a_n) \in D^n$ существует не более одного элемента $b \in D$, такого что $(a_1, \ldots, a_n, b) \in R$. — *Прим. наборщика.*

различными естественными способами уточнить понятие «перечислимости»; например, можно назвать систему конечных множеств $\mathcal{R}$ перечислимой, если множество $K \subseteq \mathcal{H}$, составленное из всех представителей всех элементов $\mathcal{R}$, перечислимо [5]. Каждую систему $\mathcal{M}$ будем без оговорок считать T_0-пространством с топологией, введенной в [5], п. 1. Подсистему $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}$ назовем эффективно открытой в $\mathcal{M}$, если существует такая перечислимая система конечных множеств $\mathcal{R}$, что $\mathcal{P} = \bigcup_{F \in \mathcal{R}} \mathcal{Q}_F$, где $\mathcal{Q}_F$ — система всех множеств из $\mathcal{M}$, содержащих F в качестве подмножества. Назовем систему $\mathcal{M}$ ω-сепарабельной, если подсистема $\mathcal{M}'$ всех конечных множеств из $\mathcal{M}$ перечислима и τ-плотна в $\mathcal{M}$, и псевдозамкнутой, если $\mathcal{M}$ τ-замкнута во всякой объемлющей системе. Наиболее важные системы — $\mathcal{A}^{(n)}$ и $\mathcal{U}^{(n)}$ — являются ω-сепарабельными, псевдозамкнутыми и связными (топологически).

3. Занумерованные множества. Множество M, рассматриваемое вместе с его нумерацией α, назовем занумерованным множеством и обозначим $M\alpha$. Подмножество $P \subseteq M$ назовем вполне перечислимым в $M\alpha$, если $\alpha^{-1}(P)$ перечислимо в $\alpha^{-1}(M)$,[3] и вполне разрешимым в $M\alpha$, если P и $M \setminus P$ вполне перечислимы в $M\alpha$ (Райс [4] ввел эти понятия для рассмотренной им нумерации). Рассматривая нумерации систем, будем говорить о занумерованных, вполне перечислимых и т. д. системах. Вычислимым отображением $X\alpha$ в $Y\beta$ назовем всякое отображение f множества X в Y, для которого существует такая вычислимая функция θ, что для любой точки $x \in X$ имеет место $\theta(\alpha^{-1}(x)) \subseteq \beta^{-1}(f(x))$. Будем говорить, что $X\alpha$ вложено в $Y\beta$, если $X \subseteq Y$ и тогжественное отображение $f(x) \equiv x$ множества X в Y вычислимо. Если M — топологическое пространство, то его нумерацию назовем открытой, коль скоро всякое его вполне перечислимое подмножество открыто, и непрерывной, коль скоро всякое открытое множество есть сумма вполне перечислимых.

Лемма 2. *Пусть X и Y — топологические пространства, α — открытая нумерация X и β — непрерывная нумерация Y. Тогда всякое вычислимое отображение $X\alpha$ в $Y\beta$ непрерывно.*

4. Вычислимые и потенциально вычислимые нумерации. Пусть $\mathcal{M}\alpha$ — занумерованная система. Множество всех пар n, t, где n принадлежит области определения α, а $t \in \alpha(n)$, называется универсальным множеством, соответствующим нумерации α. Нумерацию α назовем вычислимой, если соответствующее универсальное множество и множество $\alpha^{-1}(\mathcal{M})$ всех номеров суть перечислимые множества. Хорошо известно, что все классические нумерации вычислимы. Однако не всякая система обладает вычислимой нумерацией. Известно, что ею не обладает система всех общерекурсивных функций от n аргументов. Можно доказать, что ею не обладает система всех бесконечных перечислимых подмножеств $\mathbb{N}^n$. Нумерацию α системы $\mathcal{M}$ назовем потенциально вычислимой, если существует такая система $\mathcal{Q}$ и такая ее вычислимая нумерация β, что $\mathcal{M}\alpha$ вложена в $\mathcal{Q}\beta$. Для каждой потенциально вычислимой нумерации имеется общий метод (алгоритм), позволяющий по всякому номеру всякого перечислимого множества из рассматриваемой системы построить набор правил, определяющий это множество.

Теорема 1. *Всякая система обладает потенциально вычислимой нумерацией.*

Теорема 2. *Если α — потенциально вычислимая нумерация системы $\mathcal{M}$, то всякая система $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}$, эффективно открытая в $\mathcal{M}$, вполне перечислима в $\mathcal{M}\alpha$.*

(Райс [4] доказал эту теорему для рассмотренной им нумерации системы $\mathcal{A}^{(1)}$.)

Следствие. *Всякая потенциально вычислимая нумерация непрерывна.*

5. Накрывающие и вполне накрывающие нумерации. Для каждой из классических нумераций имеется общий метод (алгоритм), позволяющий по каждому набору правил, определяющему какое-либо множество из рассматриваемой системы, найти номер этого множества в данной нумерации. Это интуитивное свойство отражаетя, как мы надеемся, формальным определением вполне накрывающей нумерации. Нумерацию γ системы $\mathcal{M}$ назовем накрывающей (вполне накрывающей), если всякая занумерованная система $\mathcal{P}\varphi$, где $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}$, а φ — вычислимая (потенциально вычислимая) нумерация, вложена в $\mathcal{M}\gamma$. Все классические нумерации — вполне накрывающие. Неизвестно, существует ли накрывающая нумерация, не являющаяся вполне накрывающей (см. теорему 4).

[3]Мы говорим, что $R \subseteq E$ перечислимо в E, если $R = E \cap S$, где S — перечислимое множество.

Теорема 3. *Всякая система обладает вполне накрывающей нумерацией.*

Теорема 4. *Если $\mathcal{M}$ — псевдозамкнутая ω-сепарабельная система, то всякая ее накрывающая нумерация является вполне накрывающей.*

Теорема 5 (обратная к теореме 2)**.** *Если $\mathcal{M}$ есть ω-сепарабельная система и γ — ее накрывающая нумерация, то всякая система $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}$, вполне перечислимая в $\mathcal{M}\gamma$, эффективно открыта в $\mathcal{M}$.*

(Райс [4] сформулировал это утверждение в качестве гипотезы для того частного случая, когда $\mathcal{M} = \mathcal{A}^{(1)}$ и γ — рассмотренная им нумерация.)

Следствие. *Всякая накрывающая нумерация ω-сепарабельной системы открыта.*

Следствие из следствия. *Если ω-сепарабельная система $\mathcal{M}$ связна и γ — ее накрывающая нумерация, то в $\mathcal{M}\gamma$ нет нетривиальной (т. е. отличной от пустой и от $\mathcal{M}$) вполне разрешимой подсистемы.*

Это следствие из следствия содержит в качестве частного случая результаты Райса [4] об отсутствии в рассмотренной им нумерации системы $\mathcal{A}^{(1)}$ нетривиальных вполне рекурсивных классов как при сильном, так и при слабом определении.

6. Связь с вычислимыми операциями[4] [5].

Теорема 6 (7). *Пусть*[5] *$\mathcal{X}\alpha$ и $\mathcal{Y}\beta$ — занумерованные системы, причем α — вычислимая (потенциально вычислимая), а β — накрывающая (потенциально накрывающая) нумерации. Тогда всякая одноместная вычислимая операция, отображающая $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$, совпадает на $\mathcal{X}$ с некоторым вычислимым отображением $\mathcal{X}\alpha$ в $\mathcal{Y}\beta$.*

Теорема 8 (9) (обратная к теореме 6 (7))**.** *Пусть $\mathcal{Y}\beta$ — занумерованная система. Если для всякой занумерованной системы $\mathcal{X}\alpha$ с вычислимой (потенциально вычислимой) нумерацией и всякой одноместной вычислимой операции, отображающей $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$, существует совпадающее на $\mathcal{X}$ с этой операцией вычислимое отображение $\mathcal{X}\alpha$ в $\mathcal{Y}\beta$, то β — накрывающая (вполне накрывающая) нумерация.*

Теорема 10. *Пусть $\mathcal{X}\alpha$ есть ω-сепарабельная система с накрывающей, а $\mathcal{Y}\beta$ — система с потенциально вычислимой нумерацией. Тогда для всякого вычислимого отображения $\mathcal{X}\alpha$ в $\mathcal{Y}\beta$ существует одноместная вычислимая операция, совпадающая на $\mathcal{X}$ с этим отображением.*

Теорема 6 играет решающую роль в доказательстве теоремы 5. Теорема 10 доказывается при помощи обеих лемм, следствий из теорем 2 и 5, а также теоремы 2 из [5].

Пусть $X_1\alpha_1, \ldots, X_l\alpha_l, Y\beta$ — занумерованные множества. Отображение f прямого произведения $X_1 \times \ldots \times X_l$ в Y, для которого существует такая вычислимая l-местная функция θ, что коль скоро $f(x_1, \ldots, x_l) = y$ и $\alpha_i(n_i) = x_i$ $(i = 1, \ldots, l)$, то $\beta(\theta(n_1, \ldots, n_l)) = y$, назовем[6] вычислимым отображением прямого произведения $\prod X_i\alpha_i$ в $Y\beta$. Если определить само понятие прямого произведения занумерованных множеств и обобщить на него предыдущие понятия и результаты, то можно доказать следующие теоремы:

Теорема 6* (7*). *Пусть $\mathcal{X}_i\alpha_i$ $(i = 1, \ldots, l)$, $\mathcal{Y}\beta$ — занумерованные системы, причем α_i — вычислимые (потенциально вычислимые), а β — накрывающая (вполне накрывающая) нумерация. Тогда всякая l-местная вычислимая операция, отображающая $\mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_l$ в $\mathcal{Y}$, совпадает на $\mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_l$ с некоторым вычислимым отображением $\prod X_i\alpha_i$ в $Y\beta$.*

Теорема 10*. *Пусть $\mathcal{X}_i\alpha_i$ $(i = 1, \ldots, l)$ суть ω-сепарабельные системы с накрывающими нумерациями, а $\mathcal{Y}\beta$ — система с потенциально вычислимой нумерацией. Тогда для всякого вычислимого отображения $\prod X_i\alpha_i$ в $Y\beta$ существует l-местная вычислимая операция, совпадающая на $\mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_l$ с этим отображением.*

---

[4]В исходной статье здесь почему-то дана ссылка на Райса [4]; но для понимания последующих теорем необходимо знакомство с понятием вычислимой операции именно из заметки Успенского [5]. — *Прим. наборщика.*

[5]Два номера у теоремы означают, что одна теорема говорит про накрывающие и вычислимые нумерации, а вторая — аналогичное утверждение про вполне вычислимые и вполне накрывающие нумерации. (В статье про нумерации нумерация теорем не могла остаться тривиальной; дальше она еще усложняется: появляются звёздочки!) — *Прим. наборщика.*

[6]В оригинале слово «назовем» стояло до, а не после формулы $\beta(\ldots) = y$. — *Прим. наборщика.*

7. Главные нумерации. Нумерацию, являющуюся одновременно вычислимой и накрывающей, назовем главной нумерацией 1-го рода, а являющуюся одновременно потенциально вычислимой и вполне накрывающей — главной нумерацией 2-го рода. Все классические нумерации суть главные нумерации 1-го и 2-го рода одновременно. Значение главных нумераций показывает теорема 11*, вытекающая из теорем 6*, 7*, 10*.

Теорема 11*. *Пусть $\mathcal{X}_i\alpha_i$ $(i = 1, \ldots, l)$ и $\mathcal{Y}\beta$ суть ω-сепарабельные системы с главными нумерациями (одного и того же рода). Тогда класс вычислимых операций, отображающих $\mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_l$ в $\mathcal{Y}$, совпадает на $\mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_l$ с классом вычислимых отображений $\prod \mathcal{X}_i\alpha_i$ в $\mathcal{Y}\beta$.*

Теорема 12. *Всякая система обладает главной нумерацией 2-го рода.*

Что касается существования главных нумераций 1-го рода, то удалось установить лишь следующие теоремы:

Теорема 13. *Всякая ω-сепарабельная псевдозамкнутая система обладает главной нумерацией 1-го рода.*

Теорема 14. *Каждая связная ω-сепарабельная система, обладающая вычислимой нумерацией, обладает и вычислимой нумерацией, не являющейся накрывающей (и тем самым не являющейся главной).*

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова.

Поступило 30 VIII 1955

Список литературы

[1] Александров П.С. *Введение в общую теорию множеств и функций*, М.–Л.: ОГИЗ, 1948.

[2] Post E.L. Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 50 (1944), p. 284–316.

[3] Kleene S.C. *Introduction to Metamathematics*, North-Holland Pub. Co., 1952.

[4] Rice H.G. Classes of recursively enumerable sets and their decision problems. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 74 (1953), pp. 358–366.

[5] Успенский В.А. О вычислимых операциях. *Доклады АН СССР*, т. 103 (1955), № 5, с. 773–776.

Набрано 15.11.2018 (ezolin@yandex.ru). Изменения, внесенные при наборе текста:
– термины выделяем *курсивом*, а не р а з р я д к о й.
– в библиографии даны полные названия статей и журналов.
– ссылки на библиографию указываем как [1], [2], а не (1), (2).
– некоторые перечисления 1) 2) 3), а) б) в) сделаны в виде списков.
– множество натуральных чисел обозначаем $\mathbb{N}$, а не N.
– мы пишем $\mathcal{ABC}\ldots$ вместо готических букв $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\ldots$
– указанная замена шрифта сделана макрокомандой.